Задача 1.
В лифте написано: «рассчитан на 5 человек, 400 кг». Хулиган Вася приписал по одной цифре (большей нуля) перед каждым из двух чисел, но в итоге средний вес человека не изменился. Какие цифры он приписал?

Ответ: 5 и 4.

Решение.
Пусть Вася приписал цифры a и b соответственно. Тогда получаем:

$$\frac{1000b+400}{10a+5}=\frac{400}{5}; \qquad 1000b+400=800a+400; \qquad 5b=4a.$$

Значит, a — ненулевая цифра, делящаяся на 5, то есть $a=5$, а $b=4$.

Задача 2.
В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC угол A равен $60°$, BD и CE — высоты. Найдите отношение $\dfrac{AB-AC}{BE-CD}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Решение.
В прямоугольных треугольниках ABD и ACE угол A равен $60°$. Значит, $AB=2AD$, $AC=AE$. Получаем

$$\frac{AB-AC}{BE-CD}=\frac{2AD-2AE}{AB-AE-AC+AD}=\frac{2AD-2AE}{2AD-AE-2AE+AD}=\frac{2(AD-AE)}{3(AD-AE)}=\frac{2}{3}.$$

Задача 3.
В вершинах правильного шестиугольника стоят целые числа, меньшие 2018 по модулю. Для каждой пары противоположных вершин проводят диагональ, соединяющую их, считают сумму чисел в вершинах каждого из двух получившихся четырёхугольников и перемножают две получившиеся суммы. Какое наибольшее количество из трёх получившихся произведений может равняться 2018?

Ответ: 2.

Решение.
Обозначим числа в вершинах шестиугольника в порядке обхода по часовой стрелке через a, b, c, d, e и f соответственно. Тогда получившиеся произведения равны

$$(a+b+c+d)(a+d+e+f), \qquad (b+c+d+e)(a+b+e+f), \qquad (c+d+e+f)(a+b+c+f).$$

Заметим, что если произведение двух целых чисел равняется 2018, то одно из этих чисел чётно, а другое нечётно, поскольку 2018 делится на 2, но не делится на 4. Значит, если все три полученных произведения равны 2018, то среди четвёрок сумм подряд идущих написанных в вершинах шестиугольника чисел три чётные суммы и три нечётные суммы. Следовательно, сумма этих шести сумм нечётна. Но эта сумма равна $4(a+b+c+d+e+f)$. Полученное противоречие показывает, что три произведения не могли равняться 2018.
Для чисел 1, 1, -1, 1010, -1, 1, написанных последовательно в вершинах шестиугольника, три получившихся произведения равны 1 022 121, 2018 и 2018. То есть два произведения могли равняться 2018.

Задача 4.

Найдите всевозможные тройки целых ненулевых чисел a, b, c таких, что $a < b < c$ и многочлен

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

разлагается в произведение двух квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами.

Ответ: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$; $a = -3$, $b = -2$, $c = -1$; $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ или $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$.

Решение.

Пусть для квадратных трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами выполнено $x(x-a)(x-b)(x-c)+1 = f(x)g(x)$. Тогда значение произведения $f(x)g(x)$ в точках 0, a, b и c равно 1. Таким образом, в этих точках значения $f(x)$ и $g(x)$ совпадают и равны ± 1, поскольку 1 представляется в виде произведения двух целых чисел только двумя способами: $1 = 1 \cdot 1$ и $1 = (-1)\cdot(-1)$. Значит, разность $f(x) - g(x)$ принимает значение 0 в четырёх целых точек, что возможно только при $f(x) = g(x)$.

Получаем

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1 = f^2(x); \qquad x(x-a)(x-b)(x-c) = (f(x)-1)\,(f(x)+1)$$

Можно считать, что $f(x) = x^2 + ux + 1$ или $f(x) = x^2 + ux - 1$, поскольку квадраты старшего коэффициента трёхчлена $f(x)$ и его свободного члена должны равняться 1, а при умножении $f(x)$ на -1 условие задачи выполняется, а числа a, b и c не меняются. Таким образом, в этих случаях либо трёхчлен $x^2 + ux + 2$ имеет целые корни, либо трёхчлен $x^2 + ux - 2$ имеет целые корни.

В первом случае дискриминант $x^2 + ux + 2$ равен $u^2 - 8$ и является квадратом, откуда $u = -3$ или $u = 3$. Значит, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ или $a = -3$, $b = -2$, $c = -1$.

Во втором случае дискриминант $x^2 + ux - 2$ равен $u^2 + 8$ и является квадратом, откуда $u = -1$ или $u = 1$. Значит, $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ или $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$.

Задача 5.

На плоскости отмечено 2018 точек так, что любая прямая содержит не более двух отмеченных точек. Докажите, что найдутся 1009 попарно пересекающихся прямых таких, что каждая отмеченная точка лежит на одной из этих прямых.

Доказательство.

Проведём прямую l такую, что по каждую сторону от неё находится 1009 точек (для этого достаточно рассмотреть прямую, не параллельную ни одной из прямых, соединяющих пары точек, и двигать её до тех пор, пока по каждую сторону от неё не останется по 1009 точек).

Обозначим выпуклую оболочку точек по одну сторону от l через Φ_1, а по другую сторону — через Φ_2. Начнём вращать прямую l против часовой стрелки так, чтобы она не пересекалась ни с внутренностью Φ_1, ни с внутренностью Φ_2. В какой-то момент мы не сможем продолжить вращение, поскольку l будет проходить через вершину Φ_1 и вершину Φ_2. Мы дадим этим точкам номера 1 и 2, выкинем их из рассмотрения, перестроим Φ_1 и Φ_2, и продолжим вращение. Аналогичным образом мы определим точки 3 и 4, 5 и 6, …, 2017 и 2018.

Все прямые, проходящие через выбранные точки, будут пересекаться, поскольку имеют различные углы наклона по отношению к первоначальному положению прямой l, поскольку невозможно сделать полный оборот прямой, пока в каждой из полуплоскостей есть хотя бы одна отмеченная точка (полуплоскости меняются местами, а точки остаются на месте).

Таким образом, мы построили требуемые прямые.